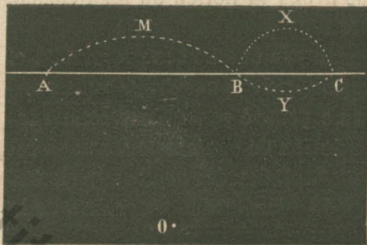
-18 — 19 — 20 — 21.



finition que nous avons donnée des lignes convexes. Il suffit pour le voir de faire les deux hypothèses possibles sur la manière dont cette ligne passe par ces trois points, à savoir : ou bien de A en B et de B en C, ou bien de A en C et de C en B. La figure ci-contre montre que dans la première hypothèse la ligne doit présenter une configuration telle que AMBYC ou que AMBXC, et que dans l'un et l'autre cas il y aura toujours quelque point O vers lequel une portion de la ligne tournerait sa convexité et une autre sa concavité. On discuterait de même la seconde hypothèse et on serait amené à la même conclusion, à savoir qu'une ligne brisée ou courbe assujettie à passer par trois points d'une droite ne saurait satisfaire à la définition que nous avons donnée des *lignes convexes*.

On prend souvent comme définition des lignes convexes la propriété que nous venons d'énoncer, et on dit :

On appelle lignes convexes *celles qui ne peuvent être rencontrées par une droite en plus de deux points.*

Nous n'avons pas voulu, dans ce qui précède, démontrer cette propriété des lignes convexes, mais montrer comment, de la notion naturelle que nous avons de ces lignes, on a pu être amené à concevoir l'existence de leur propriété fondamentale.

Il ne faut d'ailleurs pas s'étonner de la difficulté qu'on éprouve à raisonner *a priori* sur ce sujet, car la notion de la ligne droite et celle des lignes brisées ou courbes nous sont données simultanément par l'expérience ; nous ne concevons une de ces deux espèces de lignes que par opposition à l'autre, et tandis que nous nous efforçons de raisonner *a priori* sur la condition de leur existence, nous ne le faisons en réalité qu'*a posteriori*.

DU PLAN.

On peut dire que le *plan* est aux surfaces ce que la ligne droite est aux lignes en général. Nous avons la notion du plan comme nous avons celle de la ligne droite.

On définit ordinairement le plan par une de ses propriétés, et on dit : *Le plan est une surface sur laquelle une droite peut s'appliquer dans tous les sens*. Cela ne prouve pas qu'une telle surface existe réellement; mais la notion de son existence nous est fournie naturellement par la contemplation des objets extérieurs.

Il résulte de cette définition du plan et des propriétés de la ligne droite que :

1°. *Une ligne droite ne peut être en partie dans un plan et en partie au dehors ;*

2°. *Une ligne droite qui a deux de ses points dans un plan y est contenue tout entière.*

Nous nous contenterons pour l'instant de ces notions préliminaires sur le plan. Elles nous suffisent pour pouvoir diviser en deux grandes classes toutes les figures dont la géométrie peut avoir à s'occuper ; à savoir : les figures qui peuvent être contenues tout entières dans un même plan, ce sont les *figures planes* ou à *deux dimensions* ; et celles qui ne peuvent pas être contenues dans un même plan, ou figures à *trois dimensions*.

Nous partagerons donc ce cours en deux parties. La première, sous le nom de GÉOMÉTRIE PLANE, aura pour objet l'étude des figures planes, et la seconde, la GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE, traitera des figures à trois dimensions.

GÉOMÉTRIE PLANE

LIVRE PREMIER

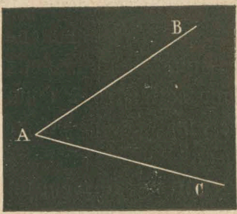
NOTIONS PRÉLIMINAIRES ET DÉFINITIONS

—

DE L'ANGLE ET DU PARALLÉLISME DES DROITES.

Deux lignes droites étant situées dans un même plan, il peut se présenter deux cas : 1°. elles se coupent lorsqu'on les prolonge suffisamment, 2°. elles ne se coupent pas si loin qu'on les suppose prolongées.

1er *cas*. — Lorsqu'elles se coupent, on obtient, en les prolongeant jusqu'à leur point de rencontre, une figure du genre de celle ci-contre, et que l'on appelle un *angle*.



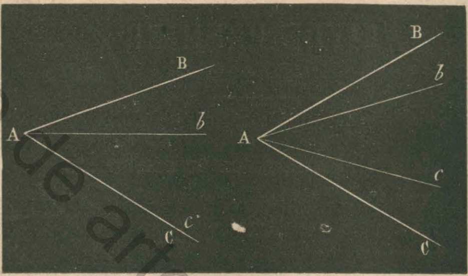
Les deux lignes AB et AC s'appellent les *côtés* de l'angle ; le point A, où les côtés se rencontrent, est son *sommet*.

On indique un angle au moyen de trois lettres : deux de ces trois lettres sont afférentes à chacun des côtés, la troisième est celle du sommet ; celle-là s'écrit et s'énonce toujours entre les deux autres ; c'est ainsi qu'on dira l'angle BAC.

Souvent aussi, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible, on désigne un angle par une seule lettre, qui est alors celle de son sommet.

D'autres figures se nomment aussi par trois lettres, de telle sorte que, lorsqu'on peut craindre quelque confusion, on écrit *angle* BAC ou $\widehat{\mathrm{BAC}}$, le signe $\wedge$ tenant lieu du mot *angle*.

Si un angle *b*A*c* est tel qu'en le transportant d'une manière convenable sur l'angle BAC on puisse lui faire prendre dans



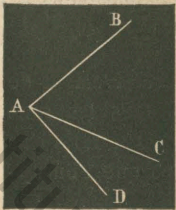
l'intérieur de ce dernier l'une des deux positions indiquées par la figure ci-contre, on dit que l'angle BAC est plus grand que l'angle *b*A*c*.

Les deux angles seraient égaux si on pouvait faire coïncider à la fois leurs deux côtés chacun à chacun.

2[e] *cas.* — Lorsque deux droites ne se rencontrent pas, si loin qu'on les suppose prolongées, on dit qu'elles sont *parallèles*. Il ne faut pas perdre de vue que nous avons supposé, en commençant, qu'il s'agissait de droites situées dans un même plan ; deux droites, pour être *parallèles*, doivent donc satisfaire à deux conditions : 1°. *être situées dans un même plan*, 2°. *ne pas se rencontrer, si loin qu'on les suppose prolongées.*

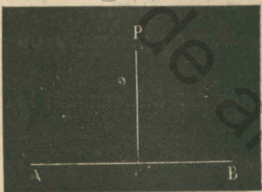
Puisque deux droites, lorsqu'elles se rencontrent, forment un angle, lorsqu'elles ne se rencontrent pas elles n'en forment pas. On dit qu'elles forment un angle nul. Ainsi, dire que deux lignes sont parallèles ou qu'elles forment un angle égal à zéro sera synonyme, et réciproquement, lorsqu'on aura vérifié que deux droites forment un angle nul, on en devra conclure qu'elles sont parallèles. Ceci d'ailleurs s'expliquera mieux plus tard.

SUITE DES DÉFINITIONS SUR LES ANGLES.



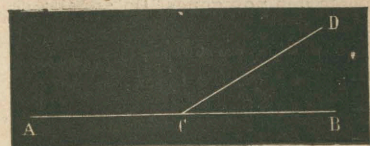
Angles adjacents. — Deux angles BAC, CAD, qui ont même sommet, sont dits *adjacents* lorsqu'ils ont un côté commun AC et que leurs autres côtés AB et AD sont situés l'un à droite et l'autre à gauche du côté commun. Si ces deux côtés étaient situés d'un même côté du côté commun, l'un des angles serait dit *intérieur* à l'autre.

Angles droits, droites perpendiculaires, obliques, etc. — Lorsqu'une droite PC en rencontre une autre en faisant des angles ACP, BCP, égaux entre eux, ces deux angles sont appelés *angles droits*, et la droite PC est dite perpendiculaire sur AB.



Nous démontrerons plus bas que réciproquement AB est perpendiculaire sur CP.

Deux droites AB et CD qui se rencontrent sont dites *obliques* entre elles lorsqu'elles ne sont pas perpendiculaires, c'est-à-dire lorsque les deux angles adjacents ACD, DCB, qu'elles forment, ne sont pas égaux.



Angle aigu, angle obtus. — Un angle est dit *aigu* ou *obtus* suivant qu'il est plus petit ou plus grand qu'un angle droit.

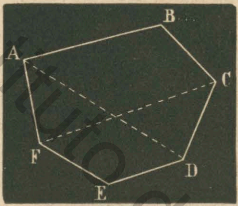
Bissectrice. — Une droite qui est située entre deux autres, de manière à faire des angles égaux avec chacun d'elles, est dite bissecter, c'est-à-dire partager en deux parties égales, l'angle de ces droites. On l'appelle pour cette raison *bissectrice* de l'angle.

Angles supplémentaires, complémentaires. — Deux angles dont la somme est égale à deux droits sont dits *supplémentaires*.

On appelle angles *complémentaires* ceux dont la somme est égale à un droit.

DES FIGURES FORMÉES PAR LA RENCONTRE DE PLUSIEURS LIGNES DROITES.

Lorsque plusieurs droites se rencontrent successivement de manière à limiter dans tous les sens une certaine portion de plan, telle que ABCDEF, elles forment ce que l'on appelle un *polygone*.



Les angles A, B, C, etc., sont les *angles* du polygone; les portions de droite AB, BC, etc., sont les *côtés* du polygone; l'ensemble des côtés forme le *contour* ou *périmètre* du polygone.

Dans tout polygone le nombre des côtés est évidemment le même que celui des angles.

On appelle *diagonale* toute ligne telle que AD ou FC, qui joint deux sommets quelconques d'un polygone.

Le nombre des côtés ou des angles des polygones forme un moyen naturel de classification de ces figures. On a donné des noms particuliers aux plus simples des polygones. On appelle

triangle	le polygone	de *trois* côtés,
quadrilatère	—	de *quatre* côtés,
pentagone	—	de *cinq* côtés,
hexagone	—	de *six* côtés.

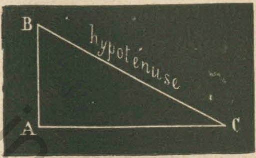
On distingue encore par des noms particuliers les polygones de 8, 10 et 12 côtés : on les appelle *octogone*, *décagone* et *dodécagone*.

Variétés du triangle. — Un triangle est *équilatéral* lorsque ses trois côtés sont égaux; *équiangle* lorsque ses trois angles sont égaux. — Nous démontrerons qu'un triangle équilatéral est en même temps équiangle.

Le triangle *isoscèle* est celui qui a deux côtés égaux. — Le troisième côté s'appelle la *base* du triangle.

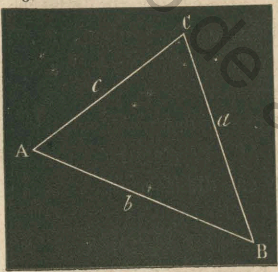
Le triangle *scalène* est celui dont les trois côtés sont inégaux.

Lorsque dans un triangle un angle A (et nous verrons qu'il ne peut y en avoir qu'un) est droit, le triangle est dit *rectangle*. Les côtés AB, AC, qui comprennent cet angle, sont dits *côtés de l'angle droit;* le côté BC, qui lui est opposé, s'appelle *hypoténuse*.

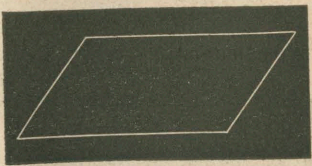


Un triangle dans lequel il y a un angle *obtus* est dit *obtusangle*. Un triangle dont tous les angles sont *aigus* est dit *acutangle*.

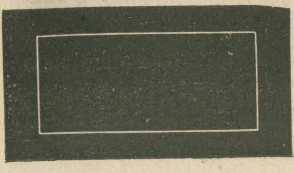
Notations usitées pour désigner les côtés et les angles d'un triangle. — Il y a toujours avantage à désigner les éléments d'une figure par les notations les plus simples, lorsque cela est possible. C'est ainsi, par exemple, que souvent on désigne les angles d'un triangle par la seule lettre de leur sommet. Quant aux côtés, on les désigne alors par la lettre minuscule correspondante à la lettre majuscule portée par le sommet opposé, ce qui n'offre aucune ambiguïté, puisque dans le triangle les côtés et les angles sont opposés deux à deux.



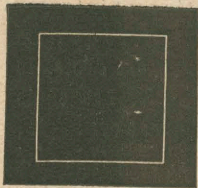
Variétés du quadrilatère. — Les principales variétés du quadrilatère que nous aurons à étudier sont les suivantes :



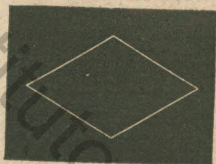
Le *parallélogramme*, dont les côtés opposés sont parallèles.



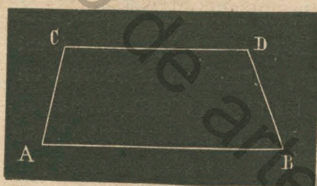
Le *rectangle*, dont les quatre angles sont droits.



Le *carré*, qui est un rectangle dont les côtés sont tous égaux entre eux.



Le *losange* est un quadrilatère dont les côtés sont égaux entre eux. — Nous démontrerons plus tard que c'est un cas particulier du parallélogramme.



Le *trapèze* est un quadrilatère dont deux côtés seulement AB et CD sont parallèles ; on les appelle les *bases* du trapèze.

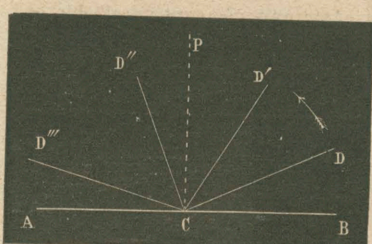
Lorsque les deux côtés non parallèles AC, BD, sont égaux, le trapèze est dit *isoscèle*.

DES ANGLES FORMÉS PAR LA RENCONTRE DE DEUX DROITES.

THÉORÈME I^{er}.

En un point quelconque C d'une droite AB on peut élever une perpendiculaire à cette droite, et on n'en peut élever qu'une.

1°. On en peut élever une.



Supposons en effet une droite CD, mobile autour du point C, et qui, d'abord couchée sur CB, s'en écarte en se mouvant dans le sens indiqué par la flèche pour venir finalement s'appliquer sur CA.